Exercice 1. Quel est le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -4b & -4 & -4b-2 \\ -b & 1 & -b \\ 4b+1 & 4 & 4b+3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(V)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps K . Prouver que si f est nilpotent, alors on a $\sigma(f) = \{0\}$ (il faut donc montrer d'abord que 0 est valeur propre de f, puis que f n'a aucune autre valeur propre).
2. Le résultat en (a) est-il encore vrai si $\dim(V) = \infty$?
3. La réciproque de (a) est-elle vraie ? En d'autres, si $\sigma(f) = \{0\}$, l'endomorphime f est-il nilpotent ? (Donnez une preuve si vous pensez que c'est le cas ou un contre-exemple dans dans le cas contraire).

Exercice 3. (a) Soit $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ une matrice complexe telle que $A^5 = \mathrm{I}_3$. Montrer que A est diagonalisable.

(b) Donner ensuite un exemple de matrice réelle $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^5 = \mathrm{I}_3$ et qui n'est pas diagonalisable comme matrice réelle. Interpréter géométriquement la matrice de votre exemple.

Exercice 4. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel V. On suppose que f est nilpotent d'ordre m où $m = \dim(V)$. Prouver qu'il existe un vecteur $u \in V$ tel que les vecteurs

$$u_1 = f^{m-1}(u),\ u_2 = f^{m-2}(u),\ \ldots, u_{m-1} = f(u),\ u_m = u \tag{1}$$

forment une base de V.

Écrire ensuite la matrice de f dans cette base.

Exercice 5. Soit $f \in \mathscr{L}(V)$ un endomorphisme d'un K-espace vectoriel V de dimension finie et $\lambda \in \sigma(f)$.

1. Rappeler la définition des multiplicités généralisées $\delta_{f,\lambda}(k)$.
2. Prouver que les multiplicités généralisées sont des invariants de conjugaison, i.e. si $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(V)$ sont conjugués, alors $\delta_{f_1,\lambda}(k) = \delta_{f_2,\lambda}(k)$ pour tout λ.

3. Démontrer la propriété de stabilité suivante : si $\delta_{f,\lambda}(k) = \delta_{f,\lambda}(k+1) = d$, alors $\delta_{f,\lambda}(j) = d$ pour tout $j \geq k$ (un exercice de la série 1 peut être utile pour cette question).

On rappelle que deux endomorphismes $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(V)$ sont conjugués *s'il existe un automorphisme $g \in \mathrm{GL}(V)$ tel que $f_2 = g^{-1} \circ f_1 \circ g$).*

Exercice 6. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes ? (Expliquez votre raisonnement.)

1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Si on peut exprimer A sous la forme $A = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente, alors $DN = ND$.
2. Si le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est de degré d, alors d divise n.
3. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\mu_A(0) \neq 0$ (où $\mu_A \in \mathbb{K}[X]$ est le polynôme minimal de A).

Exercice 7. Soit $0 < a < \infty$ et $T_a : C^0(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ l'opérateur linéaire tel que

$$T_a(\varphi)(x) = \varphi(x+a) \qquad \forall \varphi \in C^0(\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que T_a est un opérateur linéaire.
2. Décrire le noyau de T_a.
3. Montrer que $\lambda = 1$ est une valeur propre de T_a et décrire toutes les fonctions propres associées à cette valeur propre.
4. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\psi(x) = \exp(\alpha\, x)$ est une fonction propre de l'opérateur T_a. Quelle est la valeur propre associée ? Qu'en déduire sur le spectre de T_a ?

Exercice 8. On note $\mathscr{P}_3 = \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus trois. Calculer la matrice des opérateurs de translation T_a et de dérivation D dans la base $\{1, X, X^2, X^3\}$.

Exercice 9. Soit $V = C^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Rappeler pourquoi tout réel α est une valeur propre de l'opérateur $D = \dfrac{d}{dx} \in \mathscr{L}(V)$.

2. Vérifier par récurrence sur m que pour toute fonction $\varphi \in V$ on a

$$(D - \alpha\,\mathrm{Id}_V)^m \varphi = e^{\alpha\, x} D^m (e^{-\alpha\, x}\varphi).$$

3. En déduire qu'une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction propre généralisée d'ordre au plus m pour la valeur propre α si et seulement si $\varphi(x) = P(x)e^{\alpha\, x}$ $(x \in \mathbb{R})$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré au plus $m-1$.
4. Donner une base de $\mathrm{Ker}(D - \alpha\,\mathrm{Id}_V)^m$.
5. On considère maintenant l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation différentielle

$$u'''(x) - 3\,u''(x) + 4\,u(x) = 0.$$

Prouver que $\mathscr{S}$ est un espace vectoriel.
6. Trouver une base de cet espace vectoriel (on pourra utiliser le Lemme des Noyaux et le résultat en 4. ci-dessus).
7. Trouver la solution de l'équation différentielle en 5. telle que $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, $u''(0) = -1$.